On general boundary value problem for parabolic equations(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Arima, Reiko

【61】

氏　名	有　馬　礼　子（ありま れいこ）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論 理 博 第 229 号
学位授与の日付	昭和 43 年 1 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学位論文題目	**On general boundary value problem for parabolic equations** （放物型方程式に対する一般境界値問題について）
論文調査委員	（主査）教授 溝畑　茂　教授 楠　幸男　教授 吉沢尚明

論 文 内 容 の 要 旨

放物型方程式の初期-境界値問題を比較的一般に取り扱ったのは E. E. Levi が 最初であろう(1908年)。彼は熱方程式

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\Delta u(x,t)\ \left(\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$$

を R^n の領域 Ω で考え，Ω の境界を S としたとき，

$$(2)\quad \begin{cases} u(x,o)=f(x), & x\epsilon\Omega \\ u(x,t)=f_1(x,t), & x\epsilon S \end{cases}$$

となるような，与えられた初期値 $f(x)$，境界値 $f_1(x,t)$ をとる（1）の解 $u(x,t)$，$t\geq O_b$，の存在を示した。その方法はポテンシャル的方法とよばれるものであって，ある Volterra 型積分方程式を解くことに帰着せしめられるものである。

ところで，1960年前後から一般楕円形作用素に対する一般境界値問題が組織的に研究されるようになった（Agmon, Douglis, Nirenberg, Browder, Schechter 等）。申請者の研究はこの種の一般境界値条件に対する一般放物型方程式の初期—境界値問題に関するものである。すなわち，(1), (2) を一般化して

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)=A(x,t;D)\ u(x,t) \\ u(x,o)=f(x), \quad x\epsilon\Omega \\ B_j(x,t;D)\ u(x,t)=f_j(x,t), \quad x\epsilon S,\ j=1,2,\cdots\cdots,b \end{cases}$$

という形の問題である。ただし，A，B_j は

$$A(x,t;D)=\sum_{|\nu|\leq 2b}a_\nu(x,t)D^\nu$$

$$B_j(x,t;D)=\sum_{|\nu|\leq m_j}b_{j\nu}(x,t)D^\nu\ (m_j<2b)$$

という形の微分作用素である。このとき $\{B_j\}$ は normal system と呼ばれる条件をみたし，かつ境界の各点で $(A-\lambda)$ $(Re\lambda>0)$ に関して Lopatinski の条件をみたすものとする。この問題は Eidelman によってとり上げられ（1962―1963年），すでに若干の結果がソビエトの学士院記事として発表されていたが，申請者はこの方法を精密化し，一般な結果をうることに成功している。申請者のえた存在定理はつぎのようにのべられる：$f=0$ の場合，$f_j(x,t) \in C^{2b-m_j+\gamma}(S)$，$0<\gamma<1$，かつ t に関して $D^\alpha f_j$ が order $(2b-m_j+\gamma-|\alpha|)/2b$ の一様 Hölder 連続性をもつとすれば，（３）の解 $u(x,t)$，$t\geq 0$，が一意的に存在し，$u(x,t) \in C^{2b+\gamma}$ (Ω) を満足する。

つぎに $f_j=0$ $(j=1,2\cdots\cdots b)$ に応ずる問題（３）の Green 函数 $G(x,t;\tau,\xi)$ の存在ならびに評価がえられている。

楕円型作用素については，すでに解の Hölder 評価がえられているが，本論文は放物型方程式の解の存在定理を示すと同時に，それがどの程度の Hölder 連続性をもつかを研究したものであり，その所産として Green 函数 $G(x,t,;\tau,\xi)$ の評価にも成功している。

問題（３）を半群（semi-group）の理論を用いて解くことは可能であり，Tanabe は 1963年，この方法によって解の存在定理を示した。しかしその方法だけでは，例えば準線型（quasi-linear）放物型方程式に対する同種の問題を論ずることは困難とされている。これに反して本論文にのべられている研究方法は参考論文２で示されているように，この場合にまで適用される強力なものである。

論文審査の結果の要旨

主論文はその結果自身重要なものであるが，その手法にも興味深いものが少なくない。手法は粗くいえば，すべて古典的なものだといえるであろうが，従来用いられてきた対象が簡単なものであったので，その組織的な研究がなされていなかった。まず Fourier-Laplace 変換による函数の諸性質の対応関係の研究がなされており興味深い。また，Volterra 型積分核に種々の Hölder 連続性をもつ函数を合成した場合，合成函数のもつ Hölder 連続性が詳しく研究されている。特に申請者の苦心は，境界曲面上の Laplace-Beltrami 作用素に対する分数べき（fractional power）を導入し，その諸性質を巧みに用いている点であって，大胆な着想である。

研究成果の一つに Green 函数の評価がある。これは A が Δ（ラプラシアン）で，かつ境界条件が Dirichlet または Neumann 条件である場合には，本質的には E. E. Levi の研究によってえられていたといえようが，一般境界値問題に対するそれは，研究が切望されていながら，余りにも複雑であることが予測され，誰も手を染めなかった研究課題であったが，申請者は諸々の手法を整理することによって目的を達している。

参考論文１は Mizohata と共著であるが，主論文でえられた Green 函数の評価を用いて，本質的に正にあるような自己共役楕円型作用素に対する固有値の漸近分布法則を導いている。これは A が２階の場合にはすでに知られていたものであるが，同様な法則が一般な場合にもなりたつことを示したものである。

参考論文２は主論文の研究結果を反省し，一般化，完全化を図ると同時に，その結果を用いて準線型放

物型方程式に対する解の存在定理を示したものであって，この方面の研究に対する貢献は大きい。
よって，本論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。